Five Mathematicians from MacTutor History of Mathematics

Izidor Hafner, Marko Razpet, Nada Razpet

8TH ECM, June 25, 2021

Abstract

We exhibit posters describing lives and work of Jurij Vega, Franc Močnik, Josip Plemelj, Ivo Lah, and Ivan Vidav. These five Slovenian mathematicians that are covered by MacTutor History of Mathematics significantly influenced the development of mathematics in Slovenia.

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

It is right that five of our mathematicians are recorded in the MacTutor History of Mathematics.
Why Jurij Vega? Not because he worked harder than his contemporaries, but because he had a better algorithm.
Why Franc Močnik? He was very fortunate to be able to work in the immediate vicinity of Cauchy.
Why Josip Plemelj? He said: "Mathematics was a necessity in my life and an artistic pleasure."
Why Ivo Lah? He has not obtained a Ph.D., has not lectured at a university and has not been young when he published his most important works.
Why Ivan Vidav? He was the spiritus agens of Slovenian mathematics in the second half of the 20th century. "There are few capable individuals, like Galois for example, who are able to come up with many ideas on their own. These are the geniuses. There are few geniuses. The rest of us need education and training to even see what ideas are."

Ladies and gentlemen, dear friends of mathematics.

Sometimes we have to look back to establish what we already know and find the way to move forward. That's why Nada, Izidor and I have prepared posters with our five famous mathematicians, Jurij Vega, Franc Močnik, Josip Plemelj, Ivo Lah, and Ivan Vidav. They have contributed greatly to the development of mathematics and other sciences in this country. They have unquestionably earned to be recorded in the MacTutor History of Mathematics. We are sure that sometime in the future someone else from our country will be included on this list because we have many excellent mathematicians.

Enjoy the exhibition.

Birthplaces on the map

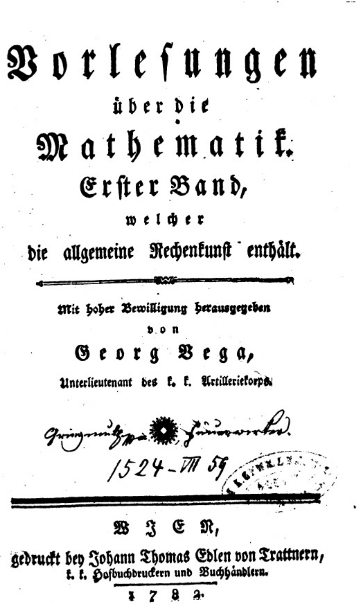
Jurij Vega (1754–1802)

Jurij Vega

Jurij Vega — from plow to baron

— Jesuit College of Ljubljana, Lyceum of Ljubljana
— navigational engineer, military service
— lecturer in mathematics at the Artillery School in Vienna
— tables of logarithms, four-volume *Vorlesungen über die Mathematik*
— *Thesaurus Logarithmorum Completus*, factorization of natural numbers, number π with 136 correct decimal places, ...
— works in ballistics, physics and astronomy

Jurij Vega is important for the development of mathematical thought in our country. We organize mathematical competitions for Vega awards for primary and secondary school youth. Mostly successful participants become good mathematicians.



Vorlesungen

über die

Mathematik.

Erster Band,

welcher

die allgemeine Rechenkunst enthält.

Mit hoher Bewilligung herausgegeben

von

Georg Vega,

Unterlieutenant des k. k. Artilleriekorps.

1524 – VIII 59

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,

k. k. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1782.

Vorlesungen

über die

Mathematik.

Zweyter Band,

welcher

die theoretische Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Anfangsgründe der praktischen Geometrie, eine Abhandlung von den krummen Linien, und die Differenzial- und Integralrechnung enthält.

Zum Gebrauche

des

Kaiserl. Königl. Artilleriekorps

aufgesetzt von

Georg Vega

Oberlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem Kaiserl. Königl. zweyten Feldartillerieregiment.

Wien,

gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,

kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1784.

Jurij Vega – Vorlesungen III, IV

Vorlesungen
über die
Mathematik.
Dritter Band,
welcher
die Mechanik der festen Körper enthält.

Zum Gebrauche
des
Kaiserl. Königl. Artilleriekorps
aufgesetzt von
Georg Vega
Hauptmann und Professor der Mathematik bey dem
Kaiserl. Königl. Bombardierkorps.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1788.

Vorlesungen
über die
Mathematik.

Sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung
mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten,
als auch insbesondere zum Gebrauche des kais. königl.
Artillerie-Corps.

Vierter Band
die Grundlehren der Hydrostatik, Aerostatik,
Hydraulik, und der Bewegung fester Körper in einem
widerstehenden flüssigen Mittel enthaltend.

Von
Georg Freyherrn von Vega,
Ritter des milit. Mar. Theres. Ordens, Major des k. k. Bombardier-Corps,
der königl. Großbrit. Societät der Wissensch. zu Göttingen Correspondenten,
der Churf. Mainz. Academie nützlicher Wissensch., der physik. mathematischen
Gesellschaft zu Erfurt, der königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissensch. zu
Prag, und der königl. Preuss. Acad. der Wissensch. zu Berlin Mitgliede.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdrucker und Buchhändler.
1800.

Jurij Vega – Thesaurus, number π (1794)

THESAURUS

LOGARITHMORUM

COMPLETUS,

EX

ARITHMETICA LOGARITHMICA, ET EX TRIGONOMETRIA ARTIFICIALI

ADRIANI VLACCI

COLLECTUS,

PLURIMIS ERRORIBUS PURGATUS,

IN NOVUM ORDINEM REDACTUS,

ET

PRIMA POST CENTESIMAM LOGARITHMORUM CHILIADE, PARTIBUS QUIBUSDAM PROPORTIONALIBUS DIFFERENTIARUM, LOGARITHMIS SINUUM, COSINUUM, TANGENTIUM ET COTANGENTIUM PRO PRIMIS AC POSTREMIS DUOBUS QUADRANTIS GRADIBUS AD SINGULA MINUTA SECUNDA, FORMULIS NONNULLIS TRIGONOMETRICIS, WOLFRAMII DENIQUE TABULA LOGARITHMORUM NATURALIUM LOCUPLETATUS

A

GEORGIO VEGA,

SUPREMO VIGILIARUM PRAEFECTO ET PROFESSORE MATHESEOS IN CAES. REG. ARTIS PYROTECHNICAE COHORTE, ET SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARUM GOETTINGENSIS SODALI CORRESPOND.

CUM PRIVILEGIO IMPRESSORIO PRIVATIVO SACR. CAES. REG. APOST. MAJEST.

LIPSIAE

IN LIBRARIA WEIDMANNIA

1794.

APPENDIX

continens

Longitudines arcuum circuli pro radio = 1,

et

Formulas nonnullas trigonometricas reſolutioni triangulorum inſervientes.

Poſita ratione diametri ad peripheriam = 1 : π, eſt

$$\pi = 40 \times \left[\frac{73}{1.3}\overset{a}{\left(\frac{1}{343}\right)} + \frac{169}{5.7}\overset{b}{\left(\frac{a}{2401}\right)} + \frac{265}{9.11}\overset{c}{\left(\frac{b}{2401}\right)} + \frac{361}{13.15}\overset{d}{\left(\frac{c}{2401}\right)} + - - - - - -\right]$$
$$+ 8 \times \left[\overset{A}{\left(\frac{3}{79}\right)} + \frac{1}{5}\overset{C}{\left(\frac{9B}{6241}\right)} + \frac{1}{9}\overset{E}{\left(\frac{9D}{6241}\right)} + \frac{1}{13}\overset{G}{\left(\frac{9F}{6241}\right)} + \frac{1}{17}\overset{I}{\left(\frac{9H}{6241}\right)} + - - - - - -\right]$$
$$- 8 \times \left[\frac{1}{3}\overset{B}{\left(\frac{9A}{6241}\right)} + \frac{1}{7}\overset{D}{\left(\frac{9C}{6241}\right)} + \frac{1}{11}\overset{F}{\left(\frac{9E}{6241}\right)} + \frac{1}{15}\overset{H}{\left(\frac{9G}{6241}\right)} + \frac{1}{19}\overset{K}{\left(\frac{9I}{6241}\right)} + - - - - -\right]$$

Subducto calculo obtinetur valor

1mae ſeriei = 0,07094 85273 02081 96140 64258 08551 27654 15038 90879 36423 20361 89065
01468 17208 13379 96558 04720 95930 81712 32590 58761 34143 70305 49182
61908 76054 31188 37724 563

2dae ſeriei = 0,03797 46993 38637 68249 79766 44999 62194 72684 78657 48534 34135 78427
16640 42595 65035 91548 66445 86207 18103 12260 26717 99560 30171 88649
90643 55589 68054 16596 3360

3tiae ſeriei = 0,00001 82541 50323 33472 22752 64846 06679 42632 86879 38461 53669 01884
16577 43865 81149 96726 41765 61508 09888 28878 22756 19197 40096 46232
11514 30099 30173 26952 0996

Diff. 1 et 2 ſer. = 0,03795 64451 88314 34777 57013 80153 55515 30051 91778 10072 80466 76543
00062 98729 83885 94822 24680 24699 08214 83382 03961 80362 90075 42417
79129 25490 37880 89644 2364

hujus 8plum = 0,30365 15615 06514 78220 56110 41228 44122 40415 34224 80582 43734 12344
00503 89838 71087 58577 97441 97592 65718 67056 31694 42903 20603 39342
33034 03923 03047 17153 8912

40plum 1 ſer. = 2,83794 10920 83278 45625 70323 42051 06166 01556 35174 56928 14475 62600
58726 88325 35198 62321 88838 37232 68493 03623 50453 65748 12219 67304
76350 42172 47535 08982 5200

π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32(8)23 06647
09384 46095 50582 26136

ubi nota decimalis 113tia eſt 8, et non 7, ut alias ubique typis impreſſum reperitur; id quod calculo ſequenti confirmatum fuit.

$$\pi = 8 \times \left\{\begin{array}{l} \frac{73}{1.3}\overset{a}{\left(\frac{1}{343}\right)} + \frac{169}{5.7}\overset{b}{\left(\frac{a}{2401}\right)} + \frac{265}{9.11}\overset{c}{\left(\frac{b}{2401}\right)} + \frac{361}{13.15}\overset{d}{\left(\frac{c}{2401}\right)} + - - - - - - \\ + \frac{26}{1.3}\overset{A}{\left(\frac{1}{27}\right)} + \frac{58}{5.7}\overset{B}{\left(\frac{A}{81}\right)} + \frac{90}{9.11}\overset{C}{\left(\frac{B}{81}\right)} + \frac{122}{13.15}\overset{D}{\left(\frac{C}{81}\right)} + - - - - - - \end{array}\right\}$$

Subducto enim calculo inventus eſt in hac ultima formula valor

2dae ſer. = 0,32175 05543 96642 19340 14046 14358 66131 90207 55295 55765 61914 32803 05935
67562 37405 81054 43564 08422 35064 13744 39007 16937 71297 39148 26764 295

Series haec addita ſeriei primae formulae praecedentis, et harum ſumma ducta in 8 dedit valorem π usque ad notam decimalem 126tam exacte congruentem valori ſuperius expoſito.

Jurij Vega – π

Vega:

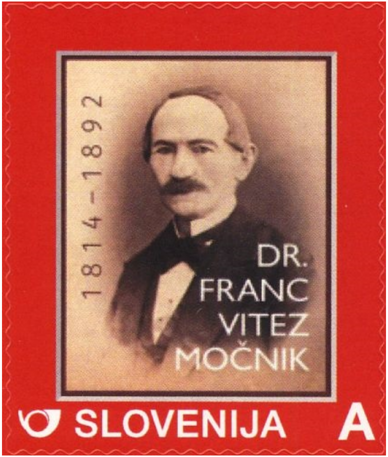
$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{79}$$

$$\begin{aligned}\pi = 3.14159\ &26535\ 89793\ 23846\ 26433\\ 83279\ &50288\ 41971\ 69399\ 37510\\ 58209\ &74944\ 59230\ 78164\ 06286\\ 20899\ &86280\ 34825\ 34211\ 70679\\ 82148\ &08651\ 32823\ 06647\ 09384\\ 46095\ &50582\ 2\textcolor{red}{6136}\end{aligned}$$

Correct:

$$\begin{aligned}\pi = 3.14159\ &26535\ 89793\ 23846\ 26433\\ 83279\ &50288\ 41971\ 69399\ 37510\\ 58209\ &74944\ 59230\ 78164\ 06286\\ 20899\ &86280\ 34825\ 34211\ 70679\\ 82148\ &08651\ 32823\ 06647\ 09384\\ 46095\ &50582\ 23172\ 53584\ 08128\\ &\ldots\end{aligned}$$

Franc Močnik (1814–1892)

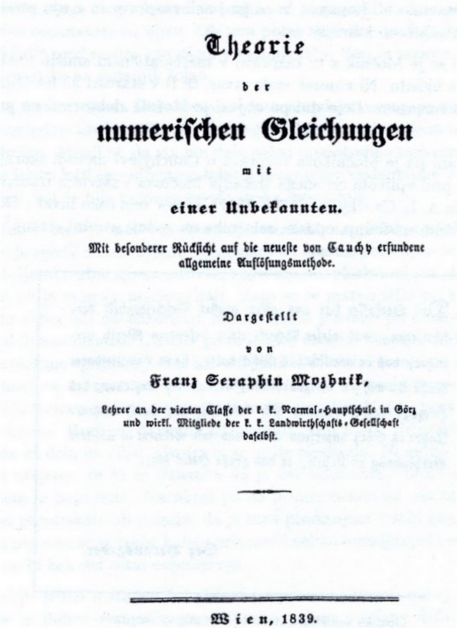


Franc Močnik

Franc Močnik — from farm and inn to Knight

— grammar school in Ljubljana, Lyceum of Ljubljana
— Roman Catholic seminary of Gorizia
— teacher at the Normal School in Gorizia, under the great influence of Strassnitzki and Cauchy
— Ph.D. at the University of Graz
— professor of elementary mathematics at the Technical Academy in Lviv
— professor of mathematics at the University in Olomouc
— school inspector, developer of practical new teaching methods
— author of many textbooks on arithmetic, algebra and geometry

Augustin-Louis Cauchy and Franc Močnik



Theorie

der

numerischen Gleichungen

mit

einer Unbekannten.

Mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflösungsmethode.

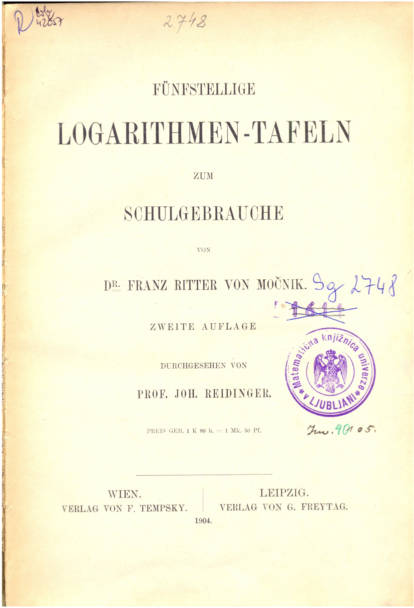
Dargestellt

von

Franz Seraphin Mozhnik,

Lehrer an der vierten Classe der k. k. Normal-Hauptschule in Görz und wirkl. Mitgliede der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaft daselbst.

Wien, 1839.



2748

FÜNFSTELLIGE

LOGARITHMEN-TAFELN

ZUM

SCHULGEBRAUCHE

VON

DR. FRANZ RITTER VON MOČNIK.

ZWEITE AUFLAGE

DURCHGESEHEN VON

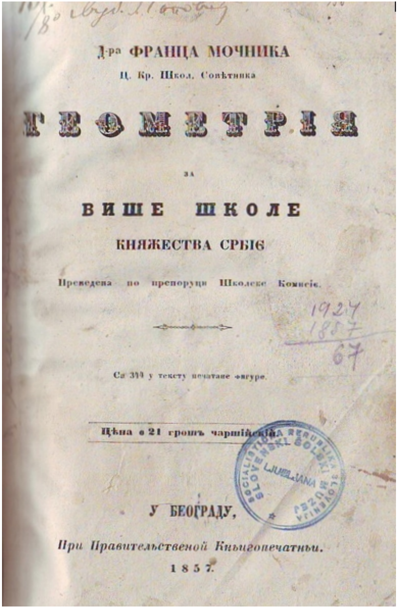
PROF. JOH. REIDINGER.

PREIS GEB. 1 K 80 h. = 1 Mk. 50 Pf.

WIEN.
VERLAG VON F. TEMPSKY.

LEIPZIG.
VERLAG VON G. FREYTAG.

1904.



Д-ра ФРАНЦА МОЧНИКА
Ц. Кр. Школ. Совѣтника

ГЕОМЕТРІЯ

ЗА

ВИШЕ ШКОЛЕ

КНЯЖЕСТВА СРБІЄ

Преведена по препоруци Школске Комисіє.

Са 349 у тексту печатане фигуре.

Цѣна о 21 грошъ чаршійскій.

У БЕОГРАДУ,

При Правительственой Кньигопечатньи.

1857.

Josip Plemelj (1873–1967)

Josip Plemelj

Josip Plemelj — from poverty to the solution of Riemann's problem

— grammar school in Ljubljana
— student at the University of Vienna
— postdoc in Berlin at Frobenius and Fuchs
— postdoc in Göttingen at Hilbert and Klein
— professor at the University of Chernivtsi
— solution of Riemann's problem
— Rector and a longtime professor at the University in Ljubljana
— differential and integral equations, analytic functions, potential theory

Father of the Slovenian university mathematics

Über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten.

Von **J. Plemelj** in Wien.

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit den eindeutigen Integralsystemen eines Systems von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten, wobei sich ganz analoge Sätze ergeben, wie sie Floquet[1]) für den Fall einer Differentialgleichung abgeleitet hat. Auch wurde jener Form, die den Integralen einer Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten Stenberg[2]) gegeben hat ein Analogon durch ein ganz anderes Verfahren zur Seite gestellt. Durchwegs wurde eine Methode befolgt, welche auch auf Differentialgleichung, deren Coefficienten in einer beliebigen Riemannschen Fläche eindeutig sind, die Monodromiegruppe aber aus lauter vertauschbaren Substitutionen besteht, anwendbar ist.

1.

Werden die linearen Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= a_{11}x^{(1)} + a_{12}x^{(2)} + \cdots + a_{1n}x^{(n)} \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= a_{21}x^{(1)} + a_{22}x^{(2)} + \cdots + a_{2n}x^{(n)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} &= a_{n1}x^{(1)} + a_{n2}x^{(2)} + \cdots + a_{nn}x^{(n)} \end{aligned}$$

von den n Systemen

$$(2)\qquad \begin{aligned} z_1 &= (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}) \\ z_2 &= (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_2^{(n)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}) \end{aligned}$$

[1]) Floquet: Comptes rendus, Band 98.
[2]) Stenberg: Acta mathematica. Bd. 15.

Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.

Von **J. Plemelj** in Czernowitz.

Unter den vielen Fragen, welche durch Riemanns Ideen angeregt worden sind, hat wohl die umfassendsten Untersuchungen jenes funktionentheoretische Problem zur Folge gehabt, welches die Bestimmung von Funktionen verlangt, die die Verzweigung einer gegebenen Riemannschen Fläche oder, noch allgemeiner, die einer gegebenen Monodromiegruppe besitzen. Während das einfachere „algebraische" Problem durch Anwendung kombinatorischer Methoden der Potentialtheorie durch Schwarz und Neumann bereits vor langer Zeit eine Lösung gefunden hat, führten diese Methoden beim allgemeinen Problem nicht zum Ziele. Funktionen, deren Existenz dieses Riemannsche Problem behauptet, haben den Charakter der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. In speziellen Fällen ist die Willkürlichkeit der Monodromiegruppe einer linearen Differentialgleichung nach älteren Methoden bereits nachgewiesen worden. So geben die automorphen ζ-Funktionen Poincarés bei gegebenen Verzweigungspunkten ein Mittel, den Beweis für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zu erbringen, wenn nur die Monodromiegruppe auf reale Verzweigungsexponenten führt.[1])

Die Revolution, welche in neuester Zeit die Verwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Theorie linearer Randwertaufgaben hervorgerufen hat, zeigte auch hier ihre Wirkung. Den ersten vollständigen Existenzbeweis erbrachte Hilbert[2]) durch Zurückführung eines noch verallgemeinerten Riemannschen Problems auf ein System Fredholmscher Funktionalgleichungen. Komplizierte Greensche Funktionen und viele Hilfsfunktionen gestalten den Beweis sehr verwickelt und wenig übersichtlich. Die Frage nach der allgemeinsten Lösung beantwortet dieser Existenzbeweis nicht.

[1]) Schlesinger, Handb. d. lin. Diffgl. II 2, S. 386 ff.
[2]) Göttinger Nachrichten 1905, S. 307 ff. Ein vorausgegangener Versuch seines Schülers Kellog (Math. Ann. 60) mit ähnlichem Bestreben ist völlig mißglückt.

Plemelj's papers — 2

Die Siebenteilung des Kreises.

Von **Josef Plemelj** in Czernowitz.

Es ist theoretisch längst bekannt, daß die Siebenteilung des Kreises durch Dreiteilung eines Winkels ausführbar ist. Die folgende geometrische Konstruktion ist nebst der Einfachheit besonders durch den Umstand bemerkenswert, daß sie die alte Regel von Abûl Wafâ Mohamed (940—998), die später unter dem Namen „indische Regel" allgemein bekannt war, als die natürlichste Näherung zur wahren Geltung bringt.

Bekanntlich hängt die Siebenteilung des Kreises von der Lösung der Gleichung $\frac{x^7-1}{x-1}=0$ ab. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $e^{\varkappa \frac{2\pi}{7} i}$, wo $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots 6$ zu setzen ist. Es werde die Wurzel $e^{\frac{6}{7}\pi i} = -e^{-\frac{\pi}{7} i}$ mit ζ bezeichnet, d. h. $\zeta = -e^{-\frac{\pi}{7} i}$. Die Größen $\zeta + \zeta^{-1}, \zeta^2 + \zeta^{-2}, \zeta^4 + \zeta^{-4}$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \tag{1}$$

Die Seite s_7 des Siebenecks ist im Einheitskreis gleich $2 \sin \frac{\pi}{7}$, d. h. es ist $s_7 = i(\zeta^{-1} - \zeta)$. Nun ist deshalb $s_7^2 = 2 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})$. Weil aber $\zeta^2 + \zeta^{-2}$ eine Wurzel von (1) ist, so folgt daraus, daß durch Substitution von $s^2 = 2 - y$ oder $y = 2 - s^2$ in die Gleichung (1) für s eine Gleichung hervorgeht, der die Seite des Siebenecks genügt. Aus dem Umstand, daß 1, 2, 4 die quadratischen Reste, $-1, -2, -4$ aber die Nichtreste (mod 7) sind, erkennt man sofort, daß die Gleichung sechsten Grades durch Adjunktion einer Quadratwurzel in zwei kubische Gleichungen zerfallen muß, deren eine die Wurzeln $i(\zeta - \zeta^{-1})$, $i(\zeta^2 - \zeta^{-2})$, $i(\zeta^4 - \zeta^{-4})$ haben wird, die andere genau die entgegengesetzten. In der Tat liefert die einfache Substitution von $y = 2 - s^2$ in (1) die Gleichung $s^6 - 7s^4 + 14s^2 - 7 = 0$, welche augenscheinlich in die beiden Gleichungen sich spaltet:

$$s^3 \pm \sqrt{7}\,(s^2 - 1) = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung (2) ist durch die Cardanosche Formel sofort lösbar, wenn man sie schreibt:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^3 - \left(\frac{1}{s}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

I. Teil.

Von **Josef Plemelj** in Wien.

Die meisten Randwertaufgaben der mathematischen Physik und der Funktionentheorie besitzen das gemeinsame Merkmal, daß die Randwerte der gesuchten Gebietsfunktion oder deren Ableitungen in der normalen Richtung gegen die Berandung des Gebietes in den gestellten Bedingungen nur linear enthalten sind. Die Kenntnis einer überall eindeutigen und im betrachteten Gebiete nur in einem Punkte nicht regulären Grundlösung der vorgelegten Differentialgleichung und die Unstetigkeitseigenschaften der entsprechenden „Potentiale" der einfachen und doppelten Schicht, ermöglichen die Zurückführung der Aufgabe auf eine lineare Funktional- oder Integralgleichung. Durch diese Zurückführung hat Fredholm[1]) die Potentialtheorie wohl von jeder Schwierigkeit, die aus der Kompliziertheit des Zusammenhanges der betrachteten Bereiche bisher sich ergab, befreit; aber auch die der Irregularität der Begrenzung entspringenden wird hoffentlich die Theorie der Integralgleichung in baldiger Zukunft beheben.

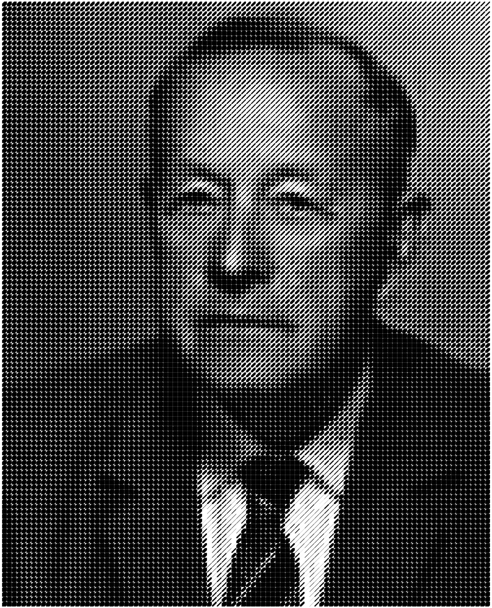
Die Theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials lassen einen völlig analogen Aufbau zu; um in diesem Aufsatz die Analogie zu einer vollständigen zu machen, werden einige neue gemeinsame Bezeichnungen eingeführt. Der Betrachtung der Randwertaufgaben haben wir die grundlegenden Sätze der Potentialtheorie vorausgeschickt, meist mit kurzer Angabe des Gedankenganges ihrer Herleitung, wenn es nötig schien, die zu machenden Voraussetzungen hervortreten zu lassen, oder auch bei nicht allgemein geläufigen Sätzen.

In diesem Teile behandeln wir die durch Einführung des Poincarèschen Parameters λ verallgemeinerte erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Beide Probleme betrachten wir gleichzeitig, sie sind vom Standpunkte Fredholms von einander nicht wesentlich verschieden, denn sie werden beide durch dieselbe Greensche Funktion gelöst. Das Reciprocitätsgesetz dieser Greenschen Funktion (Kap. 18) gibt uns ein Mittel in die Hand, aus der linearen Schaar zu einer singulären λ-Stelle gehörigen Fundamentalfunktionen Poincarès ein besonders zweckentsprechendes „canonisches" System auszuwählen (Kap. 19).

[1]) Oefvers. af kongl. vet. akad. Förh., Stockholm, 1900.

Ivo Lah (1896–1979)

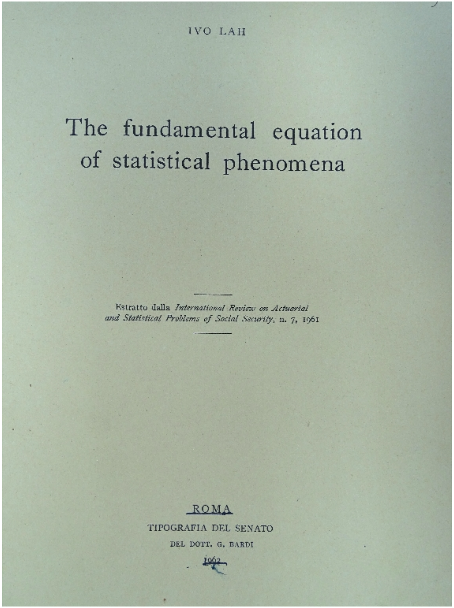
Ivo Lah



Ivo Lah — a mathematician overlooked in the homeland

— grammar school in Ljubljana
— student at the University of Vienna and at the University of Zagreb
— student at the School of Commerce and Traffic in Zagreb
— assistant for Mathematics at the Forestry Faculty of the University of Zagreb
— Social Security Foundation in Ljubljana, Zagreb and Belgrade
— trilingual book *Računske osnovice životnog osiguranja* – *Basic life insurance calculation* – written in Croatian, Russian and French, published in Zagreb in 1947; *Natura non facit saltus*
— Lah numbers $L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$
— Lah identity $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) x^{\underline{k}}$

Ivo Lah — statistician, demographer, and actuary

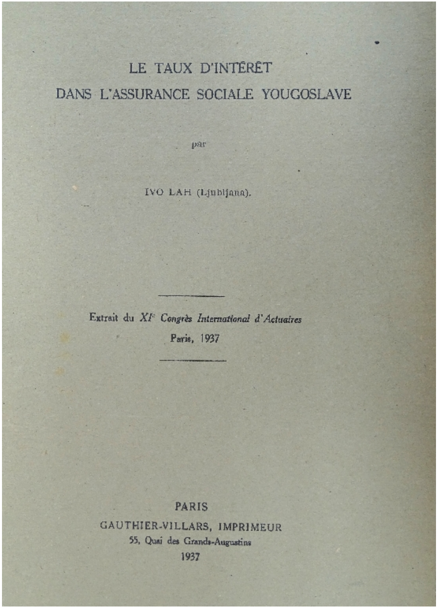


IVO LAH

The fundamental equation
of statistical phenomena

Estratto dalla *International Review on Actuarial and Statistical Problems of Social Security*, n. 7, 1961

ROMA
TIPOGRAFIA DEL SENATO
DEL DOTT. G. BARDI
1962



LE TAUX D'INTÉRÊT
DANS L'ASSURANCE SOCIALE YOUGOSLAVE

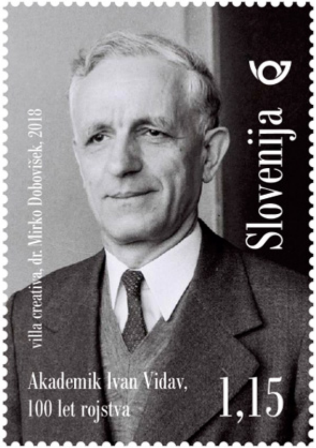
par

IVO LAH (Ljubljana).

Extrait du *XI^e Congrès International d'Actuaires*
Paris, 1937

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR
55, Quai des Grands-Augustins
1937

Ivan Vidav (1918–2015)



Ivan Vidav

Ivan Vidav — Father of the modern Slovenian mathematical school

— grammar school in Maribor
— student at the University of Ljubljana
— received doctorate in his 23rd year
— longtime professor at the University of Ljubljana
— differential equations, functional analysis, Banach algebras, C*-algebras, strongly continuous semigroups of operators
— author of several mathematical textbooks for undergraduate and graduate students
— author of several booklets and articles for young mathematicians

Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren

Von
IVAN VIDAV

1. Die beschränkten Operatoren des HILBERTschen Raumes bilden eine BANACHsche Algebra, in de die Involution $X \to X^*$ der adjungierten Operatoren den folgenden fünf Bedingungen genügt:

1°. $X^{**} = X$, 2°. $(\lambda X + \mu Y)^* = \bar{\lambda} X^* + \bar{\mu} Y^*$,

3°. $(XY)^* = Y^* X^*$, 4°. $\|X^* X\| = \|X\|^2$,

5°. Es existiert $(1 + X^* X)^{-1}$.

Hier bedeuten X, Y beliebige Operatoren und λ, μ komplexe Zahlen.

Wie bekannt, haben I. M. GELFAND und M. A. NEUMARK bewiesen [1], daß die Postulate 1° bi 5° die Unteralgebren dieser Algebra vollständig charakterisieren: Jede BANACHsche Algebra mit eine Involution, die den Bedingungen 1° bis 5° genügt, läßt sich isometrisch-isomorph auf eine gleichmäßi abgeschlossene Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes abbilden. Das fünfte Postulat er wies sich übrigens als überflüssig, weil es aus den vier anderen Postulaten folgt (s. [6], S. 884).

Wenn $X^* = X$, so nennt man den Operator X selbstadjungiert. Das Ziel dieser Arbeit ist nur ein anderes System von Postulaten aufzustellen, das die genannten Algebren mittels einer metrische Kennzeichnung der in ihnen enthaltenen selbstadjungierten Operatoren charakterisiert. Sei also $\mathfrak{B}$ ein BANACHsche Algebra mit Einheitselement, das wir mit 1 bezeichnen wollen. Unser Ziel ist der Bewei des folgenden Satzes:

I. *Es sei H eine Untermenge von $\mathfrak{B}$, die folgenden drei Bedingungen genügt:*

A. *Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ läßt sich mindestens in einer Weise in der Form $x = h + ig$ schreiben, wo $h, g \in$ F und $i^2 = -1$.*

B. *Gehört h zu H und ist ξ eine reelle Zahl, so gilt $\|1 + i\xi h\| \leq 1 + o(\xi)$, wenn ξ gegen Null strebt.*

C. *Für jedes $h \in H$ existiert eine Zerlegung $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, so, daß $uv = vu$ ist.*

Dann hat die Algebra $\mathfrak{B}$ die folgenden Eigenschaften:

1. *Die Zerlegung $x = h + ig$ ist für jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig.*

2. *Wird $x^* = h - ig$ gesetzt, falls $x = h + ig$ gilt, so ist die Abbildung $x \to x^*$ eine Involution in $\mathfrak{B}$, die de Postulaten 1°, 2°, 3° und 5° genügt. Für die Elemente $h \in H$ gilt auch 4°, also $\|h^2\| = \|h\|^2$.*

3. *$\|x\|_0 = \|x^* x\|^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm in $\mathfrak{B}$, die der ursprünglichen $\|x\|$ äquivalent ist.*

Reprinted from JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS, Vol. 30, No. 2, May 1970.

Spectra of Perturbed Semigroups with Applications to Transport Theory*

IVAN VIDAV

University of Ljubljana, Ljubljana, Yugoslavia

Submitted by R. Bellman

I. INTRODUCTION

The time dependent neutron transport equation for a sourceless medium can be written in short hand notation as $\partial N/\partial t = AN$, where N represents the neutron density per unit velocity space, and A is the, so called, Boltzmann operator. It is defined by the integrodifferential expression

$$A\psi = -\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\psi - v\Sigma(\mathbf{r},\mathbf{v})\psi + \int_\omega v'\Sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{v}' \to \mathbf{v})\psi(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d\omega \tag{1}$$

and a homogeneous boundary condition. Here $\mathbf{r}$ is the position and $\mathbf{v}$ the velocity vector, and $\Sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{v}' \to \mathbf{v})$ is the macroscopic differential scattering cross section, and $\Sigma(\mathbf{r},\mathbf{v})$ the macroscopic total scattering cross section. The integral on the right extends over all velocity space ω. If the medium, where the diffusion process occurs, is a finite convex body V with no neutrons coming from outside, then the boundary condition is as follows: $\psi(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0$ for $\mathbf{r}$ on the surface of V and for ingoing $\mathbf{v}$.

We shall assume that the operator A acts in the Banach space L_p of all measurable complex valued functions $\psi(\mathbf{r},\mathbf{v})$ whose pth power is integrable over the space $V \times \omega$. Here p can be any finite number ≥ 1. Sometimes it is convenient to introduce a suitable weight function $\rho(\mathbf{v})$ in the definition of the norm in L_p. The Boltzmann operator A can be defined in any one of the these spaces $X = L_p$ as a closed operator whose domain of definition is dense in X.

Let us write $A = T + K$, where K is the integral operator on the right of (l) and

$$T\psi = -\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\psi - v\Sigma(\mathbf{r},\mathbf{v})\psi, \tag{2}$$

the boundary condition for T being the same as for A. In what follows, we shall suppose that the cross section $\Sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{v}' \to \mathbf{v})$ and the Banach space X are such that the integral

*This work was supported by the Boris Kidrič fund, Ljubljana, Yugoslavia.

Prva stran članka prof. Vidava *Spectra of Perturbed Semigroups with Applications to Transport Theory*, J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), str. 264-279. Za to delo je prof. Vidav dobil Kidričevo nagrado za leto 1970.

Über eine Eigenschaft der Kugel.

Von

IVAN VIDAV.

1. Betrachten wir die Gesamtheit solcher geschlossener Rotationsflächen, auf denen mindestens ein Punkt M existiert von der Eigenschaft, daß jede auf der Fläche liegende, von M ausgehende Kurve, die sich einmal um die Fläche windet und wieder in den Meridian von M einmündet, mindestens die Länge 2π hat. Unter allen solchen Flächen sei jene von der kleinsten Oberfläche zu bestimmen.

Mit σ werde der Bogen auf dem Meridian der Rotationsfläche bezeichnet. Das Quadrat des Bogenelements

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2 d\varphi^2$$

kann auch in der Form

$$(*) \qquad ds^2 = r^2(u)\,(d\varphi^2 + du^2)$$

geschrieben werden, wenn wir $du = d\sigma/r$ setzen, worauf dann $r = r(u)$ eine Funktion des Parameters u wird.

In den beiden Punkten, wo $r = 0$ ist, ist $u = \pm\infty$ wegen $|u| \geq \int dr/r = \log r$. Bei einer geschlossenen Rotationsfläche durchläuft der Parameter u wachsend alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Anfangsmeridian $\varphi = 0$ gehe durch den Punkt M, wo auch $u = 0$ sein soll. Nach der Formel $(*)$ ist die ganze Fläche in die Ebene (φ, u) konform abgebildet auf den Streifen $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$. Der Parallelkreis $u = 0$ durch M, der auf das Intervall $(0, 2\pi)$ der Achse (φ) abgebildet wird, wobei die Endpunkte $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die Bilder des Punktes M sind, teilt die Fläche in zwei Teile, von denen jener Teil als der obere bezeichnet werden soll, der dem Halbstreifen $0 \leq u < +\infty$ entspricht. Die Oberfläche dieser Hälfte beträgt

$$(1) \qquad P = 2\pi \int_0^\infty r^2(u)\,du.$$

Das Bild einer Kurve, die von M ausgehend die Rotationsfläche einmal umwindet und wieder irgendwo in den Anfangsmeridian einmündet, verläuft im Streifen und verbindet den Anfangspunkt $(0, 0)$ mit einem Punkt der Geraden $\varphi = 2\pi$. Die Gleichung einer solchen Kurve lautet $u = u(\varphi)$, wenn die Funktion $u(\varphi)$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ definiert ist, und es ist $u(0) = 0$. Wenn überall $u(\varphi) \geq 0$ ist, so liegt die Kurve im oberen Teil und hat die Länge

$$(2) \qquad L = \int_0^{2\pi} r(u)\sqrt{1 + u'^2}\,d\varphi.$$

Über eine Vermutung von Kaplansky.

Von

IVAN VIDAV.

Seien a und b zwei Elemente einer assoziativen Banachschen Algebra und $c = ab - ba$ ihr Kommutator. I. KAPLANSKY hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß c, wenn mit a oder b vertauschbar, ein quasinilpotentes Element ist. Vor kurzem hat C. R. PUTNAM in der Algebra der Operatoren des Hilbertschen Raumes diese Vermutung für den Fall bewiesen, daß c mit a und b vertauschbar ist[2]). Hier will ich zeigen, daß dies auch in der allgemeinsten Banachschen Algebra gültig ist.

Wird in der Banachschen Algebra $\mathfrak{B}$ ohne Einheitselement

$$a e^x = a + \frac{ax}{1!} + \frac{ax^2}{2!} + \cdots, \qquad e^x a = a + \frac{xa}{1!} + \frac{x^2 a}{2!} + \cdots; \qquad a, x \in \mathfrak{B}$$

gesetzt, so gilt, wenn x und y vertauschbar sind:

$$(a e^x)\,e^y = a e^{x+y}, \qquad (a e^x)\,(e^y b) = [a e^{x+y}]\,b = a\,[e^{x+y} b].$$

Sei nun der Kommutator c mit a vertauschbar. Dann ist bekanntlich $n a^{n-1} c = a^n b - b a^n$. Daraus folgt leicht $\lambda e^{\lambda a} c = e^{\lambda a} b - b e^{\lambda a}$, wo λ eine beliebige Zahl ist. Es ist also für $\lambda \neq 0$

$$c = \lambda^{-1}(e^{\lambda a} b\, e^{-\lambda a} - b).$$

Hieraus ergibt sich, wenn c auch mit b vertauschbar ist:

$$c^n = \lambda^{-n}\left(e^{\lambda a} b^n e^{-\lambda a} - \binom{n}{1} e^{\lambda a} b^{n-1} e^{-\lambda a} \cdot b + \cdots \pm \binom{n}{n} b^n\right).$$

Für positive λ gilt also die Abschätzung

$$\|c^n\| \leq \lambda^{-n} e^{2\lambda\|a\|} (2\|b\|)^n.$$

Daraus folgt für $\lambda = n$:

$$\|c^n\|^{\frac{1}{n}} \leq n^{-1} e^{2\|a\|} \cdot 2\|b\|, \qquad \lim_{n\to\infty} \|c^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Ist in einer Banachschen Algebra der Kommutator $c = ab - ba$ mit a und b vertauschbar, so ist c quasinilpotent.

---

[1]) HALMOS, P. R.: Commutators of operators. II. Amer. J. Math. **76**, 191—198 (1954).
[2]) PUTNAM, C. R.: On the spectra of commutators. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 929—931 (1954).

Ljubljana (Jugoslavien), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 14. März 1955.)

Vidav's papers — 3

Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 362–366 (1958)

Über die Darstellung der positiven Funktionale

Von
IVAN VIDAV

Sei $\mathfrak{B}$ eine lineare komplexe Algebra mit Einheitselement 1 in der eine Involution definiert ist, d.h. eine solche Abbildung $x \to x^*$ von $\mathfrak{B}$ auf sich selbst, die folgenden Bedingungen genügt: a) $x^{**} = x$, b) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$, c) $(xy)^* = y^* x^*$. Ein Element u, für das $u^* = u$ gilt, werden wir symmetrisch nennen. Jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ kann man dann in der Form $x = u + iv$ schreiben, wo u und v symmetrisch sind. Ein lineares Funktional $f(x)$ in $\mathfrak{B}$ heißt positiv, wenn $f(x^* x) \geq 0$ für alle $x \in \mathfrak{B}$ gilt. Bekanntlich ist $f(1) > 0$, wenn nicht $f(x) = 0$ ist. Es soll hier stets $f(1) = 1$ angenommen werden. Ein positives Funktional $f(x)$ heißt unzerlegbar, wenn aus $f(x) = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x)$, $0 < \alpha < 1$, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ positive Funktionale bedeuten, stets $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ folgt.

Betrachten wir nun die Algebra $\mathfrak{B}$, die durch zwei symmetrische Elemente p und q erzeugt wird. Zwischen diesen Elementen bestehe die Vertauschungsrelation

$$pq - qp = -i, \quad i^2 = -1. \tag{1}$$

Daraus folgt, daß sich jedes Element $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig in der Form

$$x = \sum \alpha_{kl} p^k q^l, \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

schreiben läßt, wobei α_{kl} komplexe Zahlen bedeuten. Das adjungierte Element x^* ist dann

$$x^* = \sum \bar{\alpha}_{kl} q^l p^k = \sum \beta_{kl} p^k q^l.$$

Die Algebra $\mathfrak{B}$ besteht hier aus allen Polynomen (2).

Wird $p + iq = a\sqrt{2}$, $p - iq = a^*\sqrt{2}$ gesetzt, dann lautet die Relation (1)

$$a^* a - a a^* = 1. \tag{3}$$

Daß in dieser Algebra positive Funktionale existieren, erkennt man so: Sei $\psi(q)$ eine solche unendlich oft differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen q, $-\infty < q < \infty$, für die bei beliebigen natürlichen Zahlen k und l das Produkt $|q^k \psi^{(l)}(q)|$ gegen Null strebt, wenn $|q| \to \infty$. Ordnen wir nun dem Elemente p den Differentiationsoperator $\frac{1}{i}\frac{d}{dq}$, dem Elemente q aber den Multiplikationsoperator q zu. Dann bestimmt jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig einen Differentialoperator X, nämlich

$$X = \sum \alpha_{kl} \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dq}\right)^k q^l \tag{2*}$$

Math. Zeitschr. 71, 455–460 (1959)

Zur Axiomatik des Hilbertschen Raumes

Von
IVAN VIDAV

Ein Hilbertscher Raum $\mathfrak{H}$ ist bekanntlich ein Banachscher Raum, in dem die Norm dem sog. Parallelogrammgesetz $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ genügt. Das innere Produkt (x, y) läßt sich dann in bekannter Weise einführen. Wenn man aber umgekehrt in $\mathfrak{H}$ zuerst das innere Produkt definiert, ist es nicht notwendig, $\mathfrak{H}$ als Vektorraum vorauszusetzen. Es genügt, die Existenz der Addition der Vektoren und die Multiplikation der Vektoren mit skalaren Größen zu postulieren. Die Addition soll dabei nur einer ganz schwachen Forderung genügen. Wegen der Existenz des inneren Produktes gibt es in $\mathfrak{H}$ eine genügend große Anzahl von Linearformen. Daraus folgt, daß $\mathfrak{H}$ ein linearer Vektorraum ist. Dies werden wir hier unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zeigen.

Sei also $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring mit Einselement 1 und $\mathfrak{H}$ eine Menge von Elementen, in der zwei Rechenoperationen definiert sind:

I. Eine innere Verknüpfung $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$: Jedes geordnete Paar $x, y \in \mathfrak{H}$ bestimmt eindeutig ein Element $x + y \in \mathfrak{H}$.

II. Eine äußere Verknüpfung $\mathfrak{R} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$: Zu jedem Paar α, x, wobei $\alpha \in \mathfrak{R}$ ist und $x \in \mathfrak{H}$, gehört eindeutig ein Element $\alpha x \in \mathfrak{H}$.

Wir betrachten nun diejenigen Abbildungen $x \to f(x)$ von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{R}$, die folgenden Bedingungen genügen:

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y), \tag{1}$$

$$f(1 \cdot x) = f(x). \tag{2}$$

Dabei sind $\alpha \in \mathfrak{R}$ und $x, y \in \mathfrak{H}$ beliebig. Jede solche Abbildung $f(x)$ werden wir eine lineare Form in $\mathfrak{H}$ nennen.

Die triviale Abbildung $f(x) = 0$ ist offenbar linear (hier bedeutet 0 das Nullelement von $\mathfrak{R}$). Dies kann möglicherweise die einzige lineare Form in $\mathfrak{H}$ sein, wenn die Verknüpfungen I und II ganz beliebig sind. Gibt es aber in $\mathfrak{H}$ eine genügende Anzahl von diesen Formen und gestattet die Addition $x + y$ eine Kürzungsregel, dann ist $\mathfrak{H}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Seien in $\mathfrak{H}$ die Voraussetzungen erfüllt:

(a) *Aus $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + y$ folgt $x = y$.*

(b) *Mit etwaiger Ausnahme eines Elementes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{H}$ gibt es für jedes andere Element $x \in \mathfrak{H}$ eine lineare Form f so, daß $f(x) \neq 0$ ist.*

Dann ist $\mathfrak{H}$ ein $\mathfrak{R}$-Modul.

Thank you for your attention!